TITLE:

Metacyclic群の整数係数群環のZeta函数について($\mathbb{Z}_p$拡大およびその関連理論の研究)

AUTHOR(S):

広中, 由美子

CITATION:

広中, 由美子. Metacyclic群の整数係数群環のZeta函数について($\mathbb{Z}_p$拡大およびその関連理論の研究). 数理解析研究所講究録 1981, 440: 152-167

ISSUE DATE:

1981-10

URL:

http://hdl.handle.net/2433/102808

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
440巻 1981年 152-167

metacyclic群の整数係数群環のZeta函数について

筑波大　　広中由美子

§0. 最近、Solomon [6] が、整環上の与えられた格子の部分格子を数えあげるZeta函数を導入した。次の如きものである。Σ を有理数体 $\mathbb{Q}$ 又は p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ 上の半単純多元環（p は常に有理素数を表わす），Λ を Σ の（Σ に対応して）$\mathbb{Z}$-整環又は $\mathbb{Z}_p$ 整環（$\mathbb{Z}_p$ は p 進整数環），V を有限生成左 Σ-加群，L を V の full Λ-格子とする。このとき，

$\zeta_\Lambda(L;s) = \sum_N (L:N)^{-s}$，ここで和は L 内の full Λ-部分格子 N 全体を動く。$(L:N)$ は指数を表わし、s は複素変数である。Λ が明らかなときは略すこともある。Σ が体 K で L がその整数環のときは、Dedekind Zeta 函数そのものである。これを $\zeta_L(s)$ とかく。又、Λ が極大整環で $L=\Lambda$ の場合は Hey によって、Dedekind Zeta函数を用いた記述が得られている。

有限群 G の整数係数群環 $\mathbb{Z}G$ についてこの Zeta函数 $\zeta(\mathbb{Z}G;s)$ を調べることは、整数表現との関わりにおいても興味あるこ

とと思われる。極大整環との差を具体的に記述することが問題となる。

C_nでn次巡回群を表わす。今まで知られていたのは、$G=C_p$又はC_{p^2}のときの$\zeta(\mathbb{Z}G;s)$だけである（[6], [5]）。ここでは、次の形の群について具体的に記述することを目的とする。

qは素数，nは平方因子なしのqと素な整数とする。
C_nのC_qによる半直積$C_n\cdot C_q$で、C_qがC_nの各p-Sylow部分群に忠実に作用しているもの。

証明の詳細などは[3]を参照されたい。

§1. 準備（[1], [6]参照）

(1.1) Λが$\mathbb{Z}$-整環のとき　$\zeta_\Lambda(L;s)=\prod_p \zeta_{\Lambda_p}(L_p;s)$

ここでpは全ての有理素数を動き、添字pはp-進完備化を表わす。

(1.2) $\Lambda=\Lambda_1\oplus\Lambda_2$（整環として）ならば、$\Lambda$-格子$L$は自然にある$L_1\oplus L_2$と同型となり（$L_i$は$\Lambda_i$-格子），

$\zeta_\Lambda(L;s)=\zeta_{\Lambda_1}(L_1;s)\ \zeta_{\Lambda_2}(L_2;s)$。

(1.3) Λが極大整環のときは、Heyの公式（[2]参照）で与えられる。局所単純の場合を記しておく。Fを$\mathbb{Q}_p$の有限次拡大体とし、その整数環をRと書く。Dを中心Fの斜体，$e^2=[D:F]$とし、Dの極大整環をΔと書く。$M_m(D)$の極大整環$\mathcal{M}$は$M_m(\Delta)$と同型で、有限生成左$M_m(D)$-加群はD^{km}の形で、これのfull

$\mathfrak{M}$-格子は，$L=\Delta^{km}$ に同型である。このとき

$$\zeta_{\mathfrak{M}}(L;s)=\prod_{i=0}^{k-1}\zeta_R(mes-ei)。$$

特に $e=m=k=1$ の場合が，普通のDedekind Zeta関数である。

(1.4) $\dfrac{\zeta_{\Lambda_p}(\Lambda_p;s)}{\zeta_{\mathfrak{M}_p}(\mathfrak{M}_p;s)}$ は p^{-s} の $\mathbb{Z}$-係数多項式である。これはSolomonが予想([6])し、Bushnell と Reiner が肯定的に解いた([1])。

(1.5) Λ を $\mathbb{Z}_p$-整環とし、$\mathbb{Q}_pL$ の full Λ-格子の同型類の代表系を $\mathbb{P}$ とすると，

$$\zeta_\Lambda(L;s)=\sum_{M\in\mathbb{P}}Z_\Lambda(L,M;s)$$

$$Z_\Lambda(L,M;s)=\sum_N (L:N)^{-s}$$ ，ここで N は $\mathbb{Q}_pL$ の M と同型な Λ-格子 N 全体を動く。

(1.6) 環 R について，$R^\times$ でその単数群を表わす。Λ をある半単純 $\mathbb{Q}_p$-多元環 Σ の $\mathbb{Z}_p$-整環，L と M を Σ の full Λ-格子とする。このとき

$$Z_\Lambda(L,M;s)=\mu(\mathrm{Aut}_\Lambda(M))^{-1}(M:L)^s\int_{\{M:L\}\cap\Sigma^\times}\|x\|_\Sigma^s\,d^\times x$$

と書ける。ここで，$(M:L)=(M:M\cap L)/(L:M\cap L)$，$\{M:L\}=\{x\in\Sigma \mid Mx\subseteq L\}$，$x\in\Sigma^\times$ について $\|x\|_\Sigma=(Lx:L)$，$d^\times x$ は $\Sigma^\times$ 上の Haar 測度，これで測った測度を $\mu(\ )$ と書き，極大整環の測度を 1 としておく。

§2. 巡回群の場合.

ε_d を1の原始 d 乗根, $\varphi(\ )$ を Euler 函数とする。

(2.1) $\zeta(\mathbb{Z}C_p; s) = \zeta_{\mathbb{Z}}(s)\cdot\zeta_{\mathbb{Z}[\varepsilon_p]}(s)\cdot(1-p^{-s}+p^{1-2s})$ [6]

この式は、[1]で、§1の方法((1.5).(1.6)に基く)で導いてあり、その方法を用いると次の簡単な一般化が得られる。

命題2.2. n を平方因子なしの整数, 各 $p|n$ と $d|\frac{n}{p}$ について, g_d を $\mathbb{Z}[\varepsilon_d]$ の (p) 上の相異なる素idealの個数, $f_d = \varphi(d)/g_d$ とすると

$$\zeta(\mathbb{Z}C_n; s) = \prod_{m|n}\zeta_{\mathbb{Z}[\varepsilon_m]}(s)\prod_{p|n}\prod_{d|\frac{n}{p}}(1-p^{-f_d s}+p^{f_d(1-2s)})^{g_d}$$ 。

証明. 各 $p|n$ について

$$\mathbb{Z}_p C_n = \bigoplus_{d|\frac{n}{p}}(\mathbb{Z}_p[\varepsilon_d]C_p)^{g_d}$$ と $\mathbb{Z}_p$-群環として分解するので、

(1.2)から、$\Lambda = \mathbb{Z}_p[\varepsilon_d]C_p$ について決めればよい。(1.5)の $\mathfrak{M}$ として $\{\Lambda,\ \mathbb{Z}_p[\varepsilon_d]\oplus\mathbb{Z}_p[\varepsilon_{dp}]\}$ を採ることができて、以下は[1]と同様の方法で

$$\zeta_\Lambda(\Lambda; s) = \frac{1-p^{-f_d s}+p^{f_d(1-2s)}}{(1-p^{-f_d s})^2}$$ が得られ、これらをつ

なぎ合わせて((1.1)(1.3))、(2.2)を得る。

§3. $C_n\cdot C_q$ の場合

qを素数，nを平方因子なしのqと素な整数とする。GをC_nのC_qによる半直積$C_n\cdot C_q$で、$H=C_q$がC_nの各p-Sylow部分群に忠実に作用している群とする。

$$G=\langle \sigma,\tau \mid \sigma^n=\tau^q=1,\ \tau\sigma=\sigma^r\tau\rangle,$$

ここで，rはnの各素因子pについて，pを法として1の原始q乗根である。各$d|n$について，Hは$\mathbb{Q}(\varepsilon_d)$に，$\tau\cdot\varepsilon_d=\varepsilon_d^r$で作用する。$K_d=\mathbb{Q}(\varepsilon_d)^H$（不変体），$K_d$の整数環を$R_d$とする。

(1.1)，(1.3)から次の式を得る。

$$(3.1)\qquad \zeta(\mathbb{Z}G;s)=\zeta_{\mathbb{Z}}(s)\zeta_{\mathbb{Z}[\varepsilon_q]}(s)\prod_{\substack{d|n\\ d\neq 1}}\prod_{i=0}^{q-1}\zeta_{R_d}(qs-i)\times\prod_{p|nq}\frac{\zeta(\mathbb{Z}_pG;s)}{\zeta(\mathfrak{M}_p;s)}.$$

ここで，$\mathfrak{M}=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}[\varepsilon_q]\oplus\bigoplus_{\substack{d|n\\ d\neq 1}}M_q(R_d)$は極大整環である。

また，

$$\mathbb{Z}_qG=\bigoplus_{d|n}(\mathbb{Z}_q\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{Z}[\varepsilon_d]\circ H)=\mathbb{Z}_qH\oplus\Big[\bigoplus_{\substack{d|n\\ d\neq 1}}\mathbb{Z}_q\otimes\mathbb{Z}[\varepsilon_d]\circ C_q\Big]$$

と，$\mathbb{Z}_q$-整環として分解し、後者の因子は極大整環であるから、

$$(3.2)\qquad \frac{\zeta(\mathbb{Z}_qG;s)}{\zeta(\mathfrak{M}_q;s)}=1-q^{-s}+q^{1-2s}.$$

一方，$p|n$については，

$$\mathbb{Z}_p G = \mathbb{Z}_p(C_p \circ H) \oplus \bigoplus_{\substack{d \mid \frac{n}{p} \\ d \neq 1}} \left[\mathbb{Z}_p[\zeta_d] \circ (C_p \cdot H)\right]^{g_d}$$

と $\mathbb{Z}_p$-整環として分解する。但し、g_d は R_d の (p) 上の相異なる素 ideal の個数とし、$\mathbb{Z}_p[\zeta_d] = \mathbb{Z}_p[X]/(\Phi_d(X))$ で、$\Phi_d(X)$ は、$\mathbb{Z}_p$ 上の、最高次係数が 1 で、各 i $(1 \le i \le g)$ について $\Phi_d(\varepsilon_d^{r^i}) = 0$ なる最小の多項式である。従って、

(3.3) $\zeta(\mathbb{Z}G; s)$ を決めるには、$\zeta(\mathbb{Z}_p(C_p \cdot H); s)$ と $\zeta(\mathbb{Z}_p[\zeta_d] \circ (C_p \cdot H); s)$ を教えばよい。

以後、この節の終わりまで $\Lambda = \mathbb{Z}_p(C_p \cdot H)$ とし、$K = K_p$, $R = R_p$ と書き、p-進完備化を $\wedge$ をつけて表わす。

$g \mid p-1$ であるから、$\mathbb{Z}_p H = \mathbb{Z}_p e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p e_g$ と、巾等元 e_i によって分解し、従って

$$\Lambda = \Lambda e_1 \oplus \cdots\cdots \oplus \Lambda e_g = \mathbb{Z}_p C_p e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p C_p e_g$$

と、Λ-格子として分解する。

$$N_0 e_i = \mathbb{Z}_p e_i \oplus \mathbb{Z}_p[\varepsilon_p] e_i, \quad N_1 e_i = \mathbb{Z}_p C_p e_i$$

とおくと、これらは Λ-格子である。

$\mathbb{Q}_p \Lambda$ 内の、full Λ-格子の同型類は 2^g 個で、次のもので代表される。

$$L_{(\delta_1, \cdots, \delta_g)} = N_{\delta_1} e_1 \oplus \cdots \oplus N_{\delta_g} e_g \quad , \quad \delta_i = 0 \text{ 又は } 1 \ .$$

ここで、$\Lambda = L_{(1,\cdots,1)} \subseteq L_{(\delta_1,\cdots,\delta_g)} \subseteq L_{(0\cdots 0)}$ ($= \mathfrak{N}$ とおく) である。$\mathfrak{N}$ は $\mathbb{Z}_p H \oplus \mathbb{Z}_p[\varepsilon_p] \circ H$ と整環として分解し、$\mathfrak{O} = \mathbb{Z}_p[\varepsilon_p] \circ H$ は、

$M_q(\hat{K})$ の Hereditary 整環であるから、π を $\hat{R}$ の素元とするとき、

$$\mathfrak{A} = \{(x_{ij}) \in M_q(\hat{R}) \mid i<j \text{ ならば } x_{ij} \in \pi\hat{R}\}$$ としてよく、

必要なら e_i を並びかえて、

$$\Lambda = \{(x_1,\cdots,x_q\,;(y_{ij})) \in \mathbb{Z}_p^{\,q} \oplus \mathfrak{A} \mid x_i \equiv y_{ii} \mod \pi\hat{R},\ 1\le i\le q\}$$

と同一視してよい。

補題3.4. $L = L(\delta_1,\cdots,\delta_q)$, $r=\sum_{i=1}^{q} \delta_i$ とすると、

i) $(L:\Lambda) = p^{q-r}$

ii) $\mu(\mathrm{Aut}_\Lambda(L))^{-1} = \prod_{i=1}^{q} \left(\frac{p^i-1}{p-1}\right) \times (p-1)^r$

証明. i) は $(N_0e_i : N_1e_i) = p$ より明らか。ii) は、$\mathrm{End}_\Lambda(L)$ の各元 f が、

$(a_1,\cdots,a_q\,;(b_{ij})) \in \mathbb{Z}_p^{\,q} \oplus M_q(\mathbb{Z}_p[\varepsilon_p])$, $b_{ii}\in\hat{R}$, $i\neq j$ ならば $b_{ij} \in (\varepsilon_p - 1)\mathbb{Z}_p[\varepsilon_p]$

$\delta_i = 1$ ならば $a_i \equiv b_{ii} \mod \pi\hat{R}$

によって、一意的に与えられることからわかる。

$F = \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \simeq \hat{R}/\pi\hat{R}$ とし、$a_i \in F$ $(1\le i\le q)$ について、

$$\tilde{\Delta}(a_1,\cdots,a_q) = \{(x_1,\cdots,x_q\,;(y_{ij}))\in\Lambda \mid x_i \bmod p\mathbb{Z}_p = y_{ii} \bmod \pi\hat{R} = a_i,\ 1\le i\le q\}$$

$$\Delta(a_1,\cdots,a_q) = \{(y_{ij})\in\mathfrak{A} \mid y_{ii} \bmod \pi\hat{R} = a_i,\ 1\le i\le q\}$$

とおく。

補題3.5. i) $L=L(\delta_1\cdots\delta_q)$, $r = \sum_{i=1}^{q}\delta_i$ とすると

$$\{L:\Lambda\} = \dot{\bigcup_{\substack{a_i\in F \text{ if } \delta_i=1 \\ a_i=0 \text{ if } \delta_i=0 \\ 1\le i\le q}}} \tilde{\Delta}(a_1,\cdots,a_q) \qquad \text{(disjoint union)}$$

$a_i \in F\ (1 \le i \le q)$ とし、$k = \#\{i \mid a_i = 0,\ 1 \le i \le q\}$ とすると、

ii) $\displaystyle\int_{\Delta(a_1 \cdots a_q) \cap GL_q(\hat{k})} \|x\|^s_{M_q(\hat{k})}\, d^\times x = \int_{\Delta(\underbrace{1 \ldots 1}_{k} 0 \cdots 0) \cap GL_q(\hat{k})} \|x\|^s_{M_q(\hat{k})}\, d^\times x$

iii) $\displaystyle\int_{\tilde{\Delta}(a_1, \cdots, a_q) \cap \mathbb{Q}_p \Lambda^\times} \|x\|^s_{\mathbb{Q}_p \Lambda}\, d^\times x = \frac{1}{(p^s-1)^{q-k}(p-1)^k} \int_{\Delta(\underbrace{1, \cdots 1}_{k}, 0 \cdots 0) \cap GL_q(\hat{k})} \|x\|^s_{M_q(\hat{k})}\, d^\times x$

証明. i)は定義に従って計算する。ii)は、ある $A, B \in GL_q(\hat{R})$ が存在して、$A\,\Delta(a_1 \cdots a_q)\,B = \Delta(\underbrace{1 \ldots 1}_{k}, 0 \cdots 0)$ となることに基く。

iii)は、$Z(a_i) = \{z \in \mathbb{Z}_p \mid z \bmod p\mathbb{Z}_p = a_i\}$ とおくと、

$$\tilde{\Delta}(a_1, \cdots, a_q) = Z(a_1) \oplus \cdots \oplus Z(a_q) \oplus \Delta(a_1, \cdots, a_q)$$

となることからわかる。

次の記号を用いる。

$\Sigma_n = M_n(\hat{k})$, $\Gamma_n = \{(x_{ij}) \in M_n(\hat{R}) \mid 1 \le i < j \le n$ について $x_{ij} \in \pi \hat{R}\}$

$E_n = \Gamma_n^\times = \{(x_{ij}) \in \Gamma_n \mid x_{ii} \in \hat{R}^\times,\ 1 \le i \le n\}$

$d_n = \mu(E_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{p-1}{p^i-1}$

$0 \le k \le n$ なる k について、

$$\Delta_n(k) = \left\{(x_{ij}) \in \Gamma_n \;\middle|\; \begin{array}{ll} 1 \le i \le k \text{ について} & x_{ii} \in \hat{R}^\times \\ k+1 \le i \le n \text{ について} & x_{ii} \in \pi \hat{R} \end{array}\right\}.$$

E_n は左乗法で $\Gamma_n \cap \Sigma_n^\times$ に作用する。その代表系として次のものがとれる。$T_n = \dot{\bigcup}_{\sigma \in S_n} T_{n,\sigma}$ (S_n は n 次対称群), $T_{n,\sigma}$ は次の条件をみたす $(x_{ij}) \in \Sigma_n^\times$ の全体

i) $1 \leq j \leq n$ について $x_{\sigma(j),j} = \pi^{m_j}$　ここで、$\sigma(j) \geq j$ ならば $m_j \geq 0$, $\sigma(j) < j$ ならば $m_j \geq 1$

ii) $j+1 < i < n$ について $x_{\sigma(i),j} = 0$

iii) $1 \leq i \leq j-1$ について $x_{\sigma(i),j}$ は下の剰余群の代表全体を動く。

$$\begin{cases} \pi\hat{R}/\pi^{m_j+1}\hat{R} & \sigma(i)<j \text{ かつ } \sigma(i)<\sigma(j) \text{ のとき} \\ \hat{R}/\pi^{m_j+1}\hat{R} & j \leqq \sigma(i) < \sigma(j) \text{ のとき} \\ \pi\hat{R}/\pi^{m_j}\hat{R} & \sigma(j) < \sigma(i) < j \text{ のとき} \\ \hat{R}/\pi^{m_j}\hat{R} & \sigma(i) \geqq j \text{ かつ } \sigma(i) > \sigma(j) \text{ のとき.} \end{cases}$$

ここで m_j $(1 \leq j \leq n)$ は i) のものである。

上の (x_{ij}) について $\det(x_{ij}) = \pm p^{\sum_{j=1}^{n} m_j}$ である。

補題3.6. $n \geqq 1$ は整数とする。

i) 最高次の項が $p^{\frac{n(n-1)}{2}} X^n$, 最低次の項が X である $\mathbb{Z}$ 上の多項式 $G_n(X)$ があって、

$$\int_{\Delta_n(0) \cap \Sigma_n^{\times}} \|x\|_{\Sigma_n}^{s}\, d^{\times}x = \frac{d_n\, G_n(p^{-ns})}{\prod_{i=0}^{n-1}(1-p^{i-ns})}$$

ii) 各 k $(0 \leq k \leq n-1)$ について

$$\int_{\Delta_n(k) \cap \Sigma_n^{\times}} \|x\|_{\Sigma_n}^{s}\, d^{\times}x = \frac{d_n\, G_{n-k}(p^{k-ns})}{\prod_{i=k}^{n-1}(1-p^{i-ns})}$$

証明. i) E_n は $\Delta_n(0) \cap \Sigma_n^{\times}$ に作用し、$T_n \cap \Delta_n(0)$ がその代表系をなすので、

$$\text{i) の左辺} = \mu(E_n) \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{M \in T_{n,\sigma} \cap \Delta_n(0)} \|\det M\|_{\hat{K}}^{-ns} \quad \cdots\cdots (*)$$

となる。各 j $(1\leqq j\leqq n)$ について、$\sigma(j)>j$ ならば $m_j\geqq 0$, $\sigma(j)\leqq j$ ならば $m_j\geqq 1$ とする。更に、$t_j=\#\{i \mid 1\leq i\leq j-1$ かつ $j<\sigma(i)<\sigma(j)\}$
$v_j=\#\{i \mid 1\leq i\leq j-1$ かつ $\sigma(j)<\sigma(i)\leqq j\}$ とする。集合

$$\{(x_{ij})\in T_{n,\sigma}\cap\Delta_n(0) \mid x_{\sigma(j),j}=\pi^{m_j}\ (1\leqq j\leqq n)\}$$

の中で、異なる行列のとり方は、$p^{(j-1)m_j}\,p^{t_j-v_j}$ である。(*)に代入すると

$$\text{i) の左辺} = d_n \sum_{\sigma\in S_n} \frac{p^{c_\sigma}(p^{-ns})^{e_\sigma}}{\prod_{i=0}^{n-1}(1-p^{i-ns})},$$

ここで、$e_\sigma=\#\{j \mid 1\leqq j\leqq n$ かつ $\sigma(j)\leqq j\}$, $c_\sigma=\sum_{\substack{1\leqq j\leqq n\\ \sigma(j)>j}} t_j+\sum_{\substack{1\leqq j\leqq n\\ \sigma(j)\leqq j}}(j-1-v_j)$。

$G_n(X)=\sum_{\sigma\in S_n} p^{c_\sigma}X^{e_\sigma}$ が求めるものである。$\sigma=id$ のとき、$e_\sigma=n$, $c_\sigma=\frac{n(n-1)}{2}$, $\sigma=(12\cdots n)$ のとき $e_\sigma=1$, $c_\sigma=0$ となり、これ以外の $\sigma\in S_n$ では、$2\leqq e_\sigma\leqq n-1$ となることは容易に確められる。ii) E_n は $\Delta_n(k)\cap\Sigma_n^\times$ に作用し、$T_n\cap\Delta_n(k)$ はその代表系である。これらは、

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ & & 1\end{smallmatrix} & B \\ \hline 0 & A \end{array}\right),\quad \text{with column widths } \underbrace{\ }_{k}\ \underbrace{\ }_{n-k}$$

, $A\in T_{n-k}\cap\Delta_{n-k}(0)$ の形で、$\det A=\pm p^m$ のとき、B のとり方は、p^{km} 個あることから計算できる。

nが与えられれば、$G_n(X)$は具体的に求められる。これは、$T_{n,\sigma}$ を求めることに基き、例えば次式を得る

$$G_1(X)=X,\quad G_2(X)=pX^2+X,$$
$$G_3(X)=p^3X^3+2(p^2+p)X^2+X。$$

以上をまとめると、

命題 3.7. $\zeta(\mathbb{Z}_p(C_p\cdot H);s)=\sum_{k=0}^{g}\dfrac{{}_gC_k\left(1+(p-1)p^{-s}\right)^{g-k}G_{g-k}(p^{k-gs})}{\prod_{i=k}^{g-1}\left((1-p^{-s})(1-p^{i-gs})\right)}$

ここで、${}_gC_k$ は二項係数，$G_0(X)=1$，$\prod_{i=g}^{g}\left((1-p^{-s})(1-p^{i-gs})\right)=1$ とする。

§4. $\mathbb{Z}_p[\zeta_d]\circ(C_p\cdot H)$ の場合.

(3.3) の残っている方を扱う。この節では，$\Lambda=\mathbb{Z}_p[\zeta_d]\circ(C_p\cdot H)$ とする。

$$N_\delta e_i=\begin{cases}\mathbb{Z}_p[\zeta_d]e_i\oplus\mathbb{Z}_p[\zeta_d,\varepsilon_p]e_i & \delta=0 \text{ のとき}\\ \mathbb{Z}_p[\zeta_d]C_p e_i & \delta=1 \text{ のとき}\end{cases}$$

とすると、やはり $\mathbb{Q}_p\Lambda$ の full Λ-格子の同型類は 2^g個で、

$$L(\delta_1\cdots\delta_g)=N_{\delta_1}e_1\oplus\cdots\oplus N_{\delta_g}e_g\ ,\ \delta_i=0\text{ 又は }1$$

で代表される。$L_{(0,\cdots0)}=\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}$（ただし、$\mathfrak{A}=\mathbb{Z}_p[\zeta_d]\circ H$，$\mathfrak{B}=\mathbb{Z}_p[\zeta_d,\varepsilon_p]\circ H$）と $\mathbb{Z}_p$-整環として分解する。$\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ はともに極大整環である（[4, §40] 参照）から、$\mathfrak{A}=M_g(\hat{R}_d)$，$\mathfrak{B}=M_g(\hat{R}_{dp})$ と同一視できる。π を $\hat{R}_{dp}$ の素元とし、$F=\hat{R}_d/p\hat{R}_d\cong\hat{R}_{dp}/\pi\hat{R}_{dp}$ とする。F の位数は $P_d=p^{\varphi(d)/gd}$ である。

(3.4) と対応した次の補題を得る。

補題 4.1. $L=L(\delta_1,\dots,\delta_q)$, $r=\sum_{i=1}^{q}\delta_i$ とすると、

i) $(L:\Lambda)=p_d^{\,q(q-r)}$

ii) $\mu(\mathrm{Aut}_\Lambda(L))^{-1}=\prod_{i=0}^{r-1}\dfrac{(p_d^{\,q}-p_d^{\,i})^2}{p_d^{\,r}-p_d^{\,i}}$

証明. i) は $(N_0e_i:N_1e_i)=p_d^{\,q}$ より明らか。ii) $\tau e_i=\omega^{i-1}e_i$ なる $\mathbb{Z}_p$ 内の 1 の原始 q 乗根 ω をとり、$\gamma_k=\sum_{i=0}^{q-1}\omega^{-ki}\zeta_d^{\,ri}$ とおくと、$k\in\mathbb{Z}$ について、$\gamma_k\in\mathbb{Z}_p[\zeta_d]^\times$ で、$\tau\gamma_k=\omega^k\gamma_k$ である。

次の同型対応がある

$$\left\{((a_{ij}),(b_{ij}))\in\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}\;\middle|\;\begin{array}{l}\delta_j=1 \text{ のとき } a_{ij}\equiv b_{ij} \bmod \pi\hat{R}_{dp}\\ \text{とくに } \delta_i=0 \text{ かつ } \delta_j=1 \text{ なら}\\ \quad a_{ij},\,b_{ij}\in\pi\hat{R}_{dp}\end{array}\right\}\longrightarrow \mathrm{End}_\Lambda(L)$$

$$((a_{ij}),(b_{ij}))\longmapsto f:$$

$$f(e_i)=\Big(\sum_{j=1}^{q}\gamma_{i-j}a_{ij}e_j,\ \sum_{j=1}^{q}\gamma_{i-j}b_{ij}e_j\Big)\in\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B},\quad 1\le i\le q.$$

これから $\mu(\mathrm{Aut}_\Lambda(L))$ が計算できる。

$X\in M_q(F)$ について、

$$\Delta(X)=\{A\in M_q(\hat{R}_d)\mid A \bmod pM_q(\hat{R}_d)=X\}$$

とする。記号の簡略化のため、$\int_{\Delta(X)}$ で、積分

$$\int_{\Delta(X)\cap GL_q(\hat{K}_d)}\|x\|^s_{M_q(\hat{K}_d)}\,d^\times x$$

を表わす。

(3.5) と対応した次の補題を得る。

補題 4.2. $L = L(\delta_1, \cdots, \delta_q)$, $r = \sum_{i=1}^{q} \delta_i$ とすると、

$$\int_{\{L:\Lambda\} \cap \mathbb{D}_p \Lambda^\times} \|x\|^s_{\mathbb{D}_p \Lambda} d^\times x = \sum_{X \in \mathfrak{X}_r} \left(\int_{\Delta(X)} \right)^2$$

但し、$\mathfrak{X}_r = \{ (x_{ij}) \in M_q(F) \mid \forall 1 \leq i \leq q,\ 1 \leq j \leq q$ について $x_{ij} = 0 \}$ とする。

証明. $X \in M_q(F)$ について、$\Delta'(X) = \{ B \in M_q(\hat{R}_{dp}) \mid B \bmod \pi M_q(\hat{R}_{dp}) = X \}$ とおくと、$\{L:\Lambda\}$ は $\bigcup_{X \in \mathfrak{X}_r} \Delta(X) \oplus \Delta'(X)$ と同一視できること

が、$\{L:\Lambda\}$ の定義に従った計算でわかる。$\hat{R}_d$ と $\hat{R}_{dp}$ は、同じ剰余体を持つことから、$\Delta(X)$, $\Delta'(X)$ についての積分が等しいことがわかり結論を得る。

また、各 $X \in M_q(F)$ は、基本変形によって、ある h $(0 \leq h \leq q)$ についての標準形 $X_h = \begin{pmatrix} \overbrace{\ddots}^{h} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ になる。これを $M_q(\hat{R}_d)$ にひき戻すと、ある $A, B \in GL_q(\hat{R}_d)$ が存在して

$$A \cdot \Delta(X) \cdot B = \Delta(X_h)$$

となることがわかる。従って、このとき $\int_{\Delta(X)} = \int_{\Delta(X_h)}$ である。

補題 4.3. $$\int_{\Delta(X_h)} = \frac{p_d^{-q(q-h)s}}{\prod_{i=0}^{h-1} (p_d^q - p_d^i) \prod_{i=h}^{q-1} (1 - p_d^{i-qs})}$$

証明. $E=\left[\begin{array}{ccc|c} 1+pR & & pR & \\ & \ddots & & R \\ & & 1+pR & \\ \hline & pR & & GL_{q-h}(R) \end{array}\right]$ (q 行; 列 h, $q-h$) は、$\Delta(X_h)\cap GL_q(\hat{K}_d)$ に

$(R=\hat{R}_d)$

左乗法で作用し、その代表系として次の条件をみたす $(x_{ij})\in GL_q(\hat{K}_d)$ 全体を採れる.

i) $1\leqq j\leqq h$ について. $x_{jj}=1$

ii) $h+1\leqq j\leqq q$ について $x_{jj}=p^{m_j}$, ここで $m_j\geqq 1$

iii) $1\leqq j\leqq h$ かつ $i\neq j$ と $h+1\leqq j\leqq q$ かつ $i>j$ について $x_{ij}=0$

iv) $h+1\leqq j\leqq q$ かつ $i<j$ のとき x_{ij} は剰余群 $p\hat{R}_d/p^{m_j}\hat{R}_d$ の代表全体を動く，但し m_j は ii) のもの。

m_j $(h+1\leqq j\leqq q)$ が与えられたとき. $\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & * \\ \hline 0 & \begin{matrix} p^{m_{h+1}} & \\ 0 & \ddots \quad p^{m_q}\end{matrix}\end{array}\right)$ の形の行列が、$\prod_{j=h+1}^{q} P_d^{(m_j-1)(j-1)}$ 個存在する。この行列の行列式は $p^{\sum_{j=h+1}^{q} m_j}$ であるから、これから $\int_{\Delta(X_h)}$ が計算できる。

以上より次の命題を得る。

命題 4.4.

$$\zeta(\mathbb{Z}_p[\zeta_d]\circ(G\cdot H);s)=\sum_{r=0}^{q}\sum_{h=0}^{r}{}_qC_r\prod_{i=h}^{r-1}\frac{(P_d^{\,q}-P_d^{\,i})^2}{P_d^{\,r}-P_d^{\,i}}\times\prod_{i=0}^{h-1}\frac{P_d^{\,q}-P_d^{\,i}}{P_d^{\,h}-P_d^{\,i}}\times\frac{P_d^{-q(q+r-2h)s}}{\prod_{i=h}^{q-1}(1-P_d^{\,i-qs})^2}$$

さて、(3.6) の $G_n(X)=\sum_{\sigma\in S_n} p^{c_\sigma}X^{e_\sigma}$ を p と X の多項式とみて、$G_n(p,X)$ と書く。又、$G_0(p,X)=1$ とおく。(3.1) (3.2) (3.7) (4.4) を合わせて次の定理を得る。

定理. q を素数, n を平方因子なしの q と素な整数とする。$C_n\cdot C_q$ を C_n の C_q による半直積で, C_q が C_n の各 p-Sylow 部分群に忠実に作用している群とする。このとき,

$$\zeta(\mathbb{Z}(C_n\cdot C_q);s)=\zeta_{\mathbb{Z}}(s)\,\zeta_{\mathbb{Z}[\varepsilon_q]}(s)\left(\prod_{\substack{d|n\\ d\neq 1}}\prod_{i=0}^{q-1}\zeta_{R_d}(qs-i)\right)\left(1-q^{-s}+q^{1-2s}\right)\prod_{p|n}\left(F_{p,1}(s)\prod_{\substack{d|\frac{n}{p}\\ d\neq 1}}F_{p,d}(s)^{g_d}\right)$$

$$F_{p,1}(s)=\sum_{k=0}^{q}\left[{}_qC_k\left(1+(p-1)p^{-s}\right)^{q-k}G_{q-k}(p,p^{k-qs})\prod_{i=0}^{k-1}\left((1-p^{-s})(1-p^{i-qs})\right)\right],$$

$d\neq 1$ について

$$F_{p,d}(s)=\sum_{r=0}^{q}\sum_{h=0}^{r}\left[{}_qC_r\prod_{i=h}^{r-1}\frac{(P_d^{q}-P_d^{i})^2}{P_d^{r}-P_d^{i}}\prod_{i=0}^{h-1}\left(\frac{P_d^{q}-P_d^{i}}{P_d^{h}-P_d^{i}}(1-P_d^{i-qs})^2\right)\times P_d^{-q(q+r-2h)s}\right]$$

ここで、各 $p|n$ と $1\neq d|\frac{n}{p}$ について, g_d は R_d の (p) 上の相異なる素 ideal の個数で、$P_d=p^{\varphi(d)/qg_d}$ である。

参考文献

[1] C. J. Bushnell and I. Reiner : Zeta functions of arithmetic orders and Solomon's conjectures, Math. Zeit. 173 (1980), 135-161.

[2] M. Deuring : Algebren, Springer, Berlin, 1935.

[3] Y. Hironaka : Zeta functions of integral group rings of metacyclic groups, to appear in Tsukuba J. Math. 5(2).

[4] I. Reiner : Maximal orders, Academic Press, London, 1975.

[5] I. Reiner : Zeta functions of integral representations, Comm. algebra 8(10) (1980), 911-925.

[6] L. Solomon : Zeta functions and integral representation theory, Advances in Math. 26(1977), 306-326.

Haar 測度については例えば

[7] A. Weil : Basic number theory, Springer, Berlin, 1967.